

# Ausbreitung elektrischer Wellen längs geschichteter und längs kontinuierlich veränderlicher Plasmen

Von W. O. SCHUMANN

Aus dem Elektrophysikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. 5a, 612–617 [1950]; eingegangen am 21. Oktober 1950)

Es wird die Wellenausbreitung längs eines geschichteten und längs eines kontinuierlich in seiner Dichte veränderlichen Plasmas beschrieben. Für ein Plasma aus 2 Schichten, von denen die innere dichter ist, ergeben sich in der Frequenz 2 Ausbreitungsbereiche, in denen jeweils die Phasengeschwindigkeit vom Werte  $c$  bei der unteren Grenzfrequenz auf den Wert Null bei der oberen Frequenzgrenze sinkt. Ein Plasma, dessen Dichte linear nach innen beliebig hoch ansteigt, hat eine Grenzschichtwelle bei der Frequenz unendlich, wo sich die Welle sehr stark um die Stelle  $\varepsilon = 0$  herum konzentriert und die Phasengeschwindigkeit gegen Null geht. Für ein Plasma konstanter Dichte und der Eigenfrequenz  $\omega_0$ , mit einer in der Dichte linear nach außen abfallenden Übergangsschicht, sind Wellen nur für  $\varepsilon_p < -1$ , d. h.  $\omega^2 < \omega_0^2/2$  möglich. Je mehr sich die Welle um die Stelle  $\varepsilon = 0$  konzentriert, und je geringer ihre Phasengeschwindigkeit ist, um so näher liegt  $\omega^2$  an  $\omega_0^2/2$ . Die Dämpfung des Plasmas spielt eine sehr erhebliche Rolle.

## I. Über elektrische Wellen längs eines geschichteten Plasmas

In einer Arbeit<sup>1</sup> habe ich gezeigt, daß Wellen längs einer homogenen Plasmaschicht bzw. eines Plasmazyinders sich nur bei Frequenzen  $\omega \equiv \omega_0/\sqrt{2}$  ( $\omega_0^2 = Ne^2/m\varepsilon_0$ ) ausbreiten, und daß die Phasen-

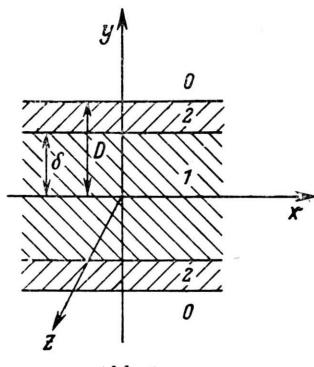


Abb. 1.

und Gruppengeschwindigkeit vom Werte  $c$  bei  $\omega = 0$  bis auf den Wert Null bei der oberen Grenzfrequenz  $\omega_g = \omega_0/\sqrt{2}$  abfällt.

Da begrenzte Plasmen niemals streng homogen sind, war noch zu diskutieren, ob dies auch bei Plasmen veränderlicher Dichte zutrifft.

Es soll deshalb zunächst im folgenden ein geschichtetes Plasma nach Abb. 1 untersucht werden.

Wir setzen für die Schichtung, zweidimensional, mit der Form  $e^{j(\omega t - ax)}$  eine longitudinale  $E$ -Welle an:

### 1. in Luft

$$H_{z_0} = A_0 e^{-m_0 y}, \quad E_{x_0} = j \frac{m_0}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y},$$

$$E_{y_0} = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y},$$

$\varepsilon_0$  Dielektrizitätskonstante des Vakuums,

$$\alpha^2 - \omega^2/c^2 = m_0^2;$$

### 2. im äußeren Plasma 2

$$H_{z_2} = A_2 e^{-m_2 y} + B_2 e^{m_2 y},$$

$$E_{x_2} = j \frac{m_2}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} [A_2 e^{-m_2 y} - B_2 e^{-m_2 y}],$$

$$E_{y_2} = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} [A_2 e^{-m_2 y} + B_2 e^{-m_2 y}],$$

$\varepsilon_2 = 1 - \omega^2 \varepsilon_0 / \omega^2$ , relative Dielektrizitätskonstante des Plasmas 2,

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 = m_2^2,$$

### 3. im inneren Plasma 1 ein in $E_x$ zu $y = 0$ symmetrisches Feld

$$H_{z_1} = -A_1 \sin m_1 y, \quad E_{x_1} = j \frac{m_1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} A_1 \cos m_1 y,$$

$$E_{y_1} = -\frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} A_1 \sin m_1 y,$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{\omega^2}, \quad \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 = m_1^2.$$

<sup>1</sup> W. O. Schumann, S.-B. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. 1948, 255.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Dann ergeben die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen  $y = \delta$  und  $y = D$  die Gleichung

$$-\Im g m_1 \delta = \frac{m_1}{m_2} \frac{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{m_0}{m_2} \Im g m_2 (D - \delta)}{1 + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{m_2}{m_0} \Im g m_2 (D - \delta)}, \quad (\text{I. 1})$$

wozu noch für die  $m$  die Gleichungen gelten

$$m_1^2 - m_0^2 = \frac{\omega_{01}^2}{c^2}, \quad m_2^2 - m_0^2 = \frac{\omega_{02}^2}{c^2}. \quad (\text{I. 2})$$

Es ist also  $m_1 > m_2 > m_0$ , wenn  $\omega_{01} > \omega_{02}$  ist, d.h. in der Mitte das dichteste Plasma ist. Da  $m_0$  positiv und reell sein muß, kommen imaginäre  $m_1$  und  $m_2$  nicht in Frage. Die „graphische“ Lösung dieser Gleichung ist nur im dreidimensionalen  $m_0$ -,  $m_1$ - und  $m_2$ -Raum möglich. Wir wollen dies hier nicht durchführen, sondern nur nach der Existenz der eingangs erwähnten beiden charakteristischen Grenzpunkte bei  $\omega = 0$ ,  $v_P = c$ , und  $v_P = 0$  bei einer oberen Grenzfrequenz fragen.

a)  $v_P = \omega/a = 0$  bei der oberen Grenzfrequenz, Bildung einer Grenzflächenwelle

In diesem Falle erwarten wir analog Arbeit<sup>1</sup>, daß  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_0$  mit  $a$  sehr groß und von gleicher Größenordnung werden. Dann können wir die  $\Im g$  gleich 1 setzen und aus der Stetigkeitsbedingung (I. 1)  $m_2/m_0$  als Funktion von  $m_1/m_0$  berechnen. Als Lösung ergibt sich

$$\frac{m_2}{m_0} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{m_1}{m_0}.$$

Führt man nun nach (I. 2.)

$$m_1^2/m_0^2 = 1 + \omega_{01}^2/c^2 m_0^2,$$

$$\text{und } m_2^2/m_0^2 = 1 + \omega_{02}^2/c^2 m_0^2$$

in diese Gleichung ein, so entsteht

$$\frac{1}{c^2 m_0^2} = \frac{(\epsilon_2/\epsilon_1)^2 - 1}{\omega_{02}^2 - (\epsilon_2/\epsilon_1)^2 \omega_{01}^2}.$$

$m_0^2$  wird also nur dann sehr groß, wenn

$$\epsilon_2/\epsilon_1 = -1 \quad (\text{I. 3})$$

ist, und gleichzeitig  $\omega_{02}^2 \neq \omega_{01}^2$  ist.

Aus der Bedingung (I. 3.) folgt als obere Grenzfrequenz, bei der  $a \rightarrow \infty$ ,  $v_P \rightarrow 0$  geht

$$\omega_g^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2}, \quad \epsilon_1 = \frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}.$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}.$$

Für  $\omega_{01} > \omega_{02}$ , d.h. innen dichteres Plasma, folgt im Plasmakern  $\epsilon_1 < 0$ , und in der äußeren Plasmahülle  $\epsilon_2 > 0$ . Die Felder im Kernplasma steigen sehr stark gegen den äußeren Rand an. In der äußeren Plasmahülle fallen sie nach außen sehr stark ab, da die Konstante  $B$  sehr klein gegen  $A$  wird. Die Schichtdicken spielen in diesem Fall keine Rolle, da die Welle sich so stark um die Grenze Kernplasma — Plasmahülle,  $y = \delta$ , konzentriert, daß die Dicke des Kerns und der Hülle keine Rolle spielen. Die Welle verläuft ganz innerhalb des Plasmas und in der äußeren Luft merkt man so gut wie nichts von ihr. Die Feldstärken  $E_{y_1}$  und  $E_{y_2}$  sind einander entgegengesetzt gerichtet, da  $A_1$  das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie  $A_2$ ,  $\epsilon_1$  negativ und  $\epsilon_2$  positiv ist. Es treten also pulsierende Raumladungen an den Plasmagrenzen auf. Es ist wegen der Stetigkeit

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{m_2 D} \frac{1 + \frac{m_0}{m_2} \epsilon_2}{1 - \frac{m_0}{m_2} \epsilon_2}$$

und

$$A_1 \Im g m_1 \delta = -A_2 \left[ \frac{e^{-m_2 \delta} + e^{-m_2 D} \frac{1 - \frac{m_0}{m_2} \epsilon_2}{1 + \frac{m_0}{m_2} \epsilon_2}}{e^{-m_2 \delta} + e^{-m_2 D} \frac{1 - \frac{m_0}{m_2} \epsilon_2}{1 + \frac{m_0}{m_2} \epsilon_2}} \right].$$

Damit ist eine Grenzflächenwelle innerhalb des Plasmas und eine obere Grenzfrequenz für  $\omega_{01} \neq \omega_{02}$  nachgewiesen.

Es existiert aber noch eine tiefer liegende Grenzfrequenz mit  $v_P = 0$ , die aus (I. 1) folgt, wenn  $\epsilon_2 m_0/m_2 \rightarrow -1$  geht. Es wird dann der Bruch der Gl. (I. 1) unbestimmt, %, wenn  $m_0$  und  $m_2$  mit gleicher Größe gegen  $\infty$  gehen und gleichzeitig  $\epsilon_2 \rightarrow -1$ . Schreibt man die Gl. (I. 1) in der Form

$$\Im g m_2 D = \frac{-\frac{m_2}{m_0 \epsilon_2} \left[ -\Im g m_1 \delta \cdot \Im g m_2 \delta + \frac{m_1}{m_2} \epsilon_2 \right] - \left[ \Im g m_1 \delta - \frac{m_1 \epsilon_2}{m_2} \Im g m_2 \delta \right]}{-\Im g m_1 \delta \cdot \Im g m_2 \delta + \frac{m_1}{m_2} \epsilon_2 + \frac{m_2}{m_0 \epsilon_0} \left[ \Im g m_1 \delta - \frac{m_1 \epsilon_2}{m_2} \Im g m_2 \delta \right]},$$

so sieht man, daß in diesem Fall  $\Im m_2 D \rightarrow 1$ , d. h.  $m_2 \rightarrow \infty$  geht, mit  $\varepsilon_2 \rightarrow -1$ , d. h.  $\omega^2 \rightarrow \omega_{02}^2/2$  und daher auch  $m_0 \rightarrow \infty$ . Es ist dies eine Grenzflächenwelle an der Grenze des äußeren Plasmas gegen die Luft. Wir haben also 2 obere Grenzfrequenzen mit  $v_P = 0$  bei  $\omega = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)/2$  und bei  $\omega^2 = \omega_{02}^2/2$ .

### b) Verhalten bei $\omega \rightarrow 0$

In diesem Fall erwarten wir nach Arbeit<sup>1</sup>, daß mit  $\omega \rightarrow 0$ ,  $m_0$  auch gegen Null geht,  $v_P \rightarrow c$ , wobei aber gleichzeitig  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  gegen  $\infty$  gehen.

$$\varepsilon_1 \rightarrow -\omega_{01}^2/\omega^2, \quad \varepsilon_2 \rightarrow -\omega_{02}^2/\omega^2.$$

$m_2$  und  $m_1$  bleiben endlich. Da auch  $a$  mit  $\omega$  gegen Null geht, nähern sich mit verschwindender Frequenz

$$m_1^2 \rightarrow \omega_{01}^2/c^2, \quad m_2^2 \rightarrow \omega_{02}^2/c^2.$$

Mit diesen Voraussetzungen kann man aus der Stetigkeitsgleichung (I. 1)  $m_0 \varepsilon_1$  berechnen und erhält

$$\begin{aligned} -m_0 \varepsilon_1 &= m_0 \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \\ &= \frac{\omega_{01}}{c} \frac{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \Im m_1 \delta \Im m_2 (D - \delta) + 1}{\Im m_1 \delta + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \Im m_2 (D - \delta)}. \end{aligned}$$

Hieraus kann  $m_0$  berechnet werden und man erkennt, daß es proportional mit  $\omega^2$  gegen Null geht. Für  $\omega_{01} = \omega_{02}$  geht die Gleichung über in

$$m_0 = \frac{\omega^2}{\omega_0 c} \frac{1}{\Im m_1 D}$$

wie in Arbeit<sup>1</sup> für homogenes Plasma abgeleitet.

Mit abnehmender Frequenz nähert sich die Phasengeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit. Das Feld erstreckt sich sehr weit in den Lufträum und ist innerhalb der Plasmen nur wenig veränderlich.

### c) Lichtgeschwindigkeit bei endlicher Frequenz

Nicht nur bei  $\omega = 0$  wird  $v_P = c$ , sondern auch für endliches  $\omega$  mit  $m_0 = 0$ ,  $a = \omega/c$ ,  $m_1^2 = \omega_{01}^2/c^2$ ,  $m_2^2 = \omega_{02}^2/c^2$  folgt aus (I. 1) für endliche  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$

$$-\Im m_1 \delta \Im m_2 (D - \delta) = \frac{m_1 \varepsilon_2}{m_2 \varepsilon_1}$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  und daraus die Frequenz.

Da  $m_1 \delta$  und  $m_2(D - \delta)$  in diesem Fall meist klein gegen 1 sind, kann man  $\Im m$  durch die Argu-

mente ersetzen und erhält dann

$$-\delta(D - \delta) \frac{\omega_{02}^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

und daraus

$$\omega^2 = \omega_{02}^2 \frac{1 + \delta(D - \delta) \omega_{01}^2/c^2}{1 + \delta(D - \delta) \omega_{02}^2/c^2}.$$

Es ist also bei  $\omega_{01} > \omega_{02}$ ,  $\omega^2 > \omega_{02}^2$  aber  $\omega^2 < \omega_{01}^2$ , d. h.  $\varepsilon_2 > 0$  und  $\varepsilon_1 < 0$ .

Wir haben also 2 Frequenzbänder zu erwarten. Das erste von  $\omega^2 = 0$  bis  $\omega_{02}^2/2$  und das zweite von

$$\omega^2 = \omega_{02}^2 \frac{1 + \delta(D - \delta) \omega_{01}^2/c^2}{1 + \delta(D - \delta) \omega_{02}^2/c^2}$$

bis  $\omega^2 = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)/2$ . In beiden geht die Phasengeschwindigkeit von  $v_P = c$  an der unteren Grenze bis auf Null bei der oberen Grenze.

## II. Plasma mit kontinuierlicher DichteVerteilung

Wenn die DichteVerteilung eines Plasmas entsprechend Abb. 1 *kontinuierlich* in  $y$ -Richtung sich ändert, so ergibt sich für (TrH) longitudinale E-Wellen, die in  $x$ -Richtung laufen, mit dem Ansatz  $e^{j(\omega t - ax)}$  die Differentialgleichung für  $H_z$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - a^2 \right) H_z = 0, \quad (\text{II. 1})$$

$$\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad \omega_0^2 = \frac{N e^2}{m \varepsilon_0}, \quad \varepsilon = f(y) \quad (\text{II. 2})$$

und

$$E_x = -\frac{j}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{a}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} H_z. \quad (\text{II. 3})$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung wird an anderer Stelle diskutiert werden. Eine brauchbare Näherung für viele Zwecke ist die Annahme  $a^2 \gg \omega^2 \varepsilon/c^2$  oder  $v_P^2/c^2 \ll 1/\varepsilon$ , die besonders in der Gegend kleiner  $v_P$  und kleiner  $\varepsilon$  gut zutrifft, da  $v_P$  normalerweise  $< c$  ist.

Nimmt man einen linearen Verlauf der Dielektrizitätskonstante an, z. B.  $\varepsilon = ya$ , so wird aus (II. 1)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} a y - a^2 \right) H_z = 0. \quad (\text{II. 4})$$

In diesem Fall ist für  $y = 1/a$ ,  $\omega_0^2 = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  und für  $y = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , ist  $\omega_0^2$  auf  $\omega^2$  angestiegen. Für negatives  $y$  ist  $\omega^2 < \omega_0^2$ . Für linearen Anstieg der Plasmadichte  $-d\omega_0^2/dy = k$  ist

$$a = k/\omega^2, \quad (\text{II. 5})$$

d. h. für tiefe Frequenzen liegt  $\varepsilon = 0$  nahe am Plasmarand, dagegen für hohe Frequenzen tief innerhalb des Plasmas. Setzt man wieder  $a\gamma\omega^2/c^2 \ll a^2$ , d. h.  $a\gamma \ll c^2/\omega^2$  voraus, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - a^2 H_z = 0$$

und hat die Lösung  $H_z = y Z_1(ja\gamma y)$ , wo  $Z$  eine Besselsche Funktion ist. Damit wird

$$E_x = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} Z_0(ja\gamma y) \quad \text{und} \quad E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} Z_1(ja\gamma y).$$

Für die angrenzende Luft setzen wir wieder

$$H_{z_0} = A_0 e^{-m_0 y}, \quad E_{x_0} = j \frac{m_0}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y}.$$

Aus der Stetigkeit von  $H_z$  und  $E_x$  für  $y = 1/a$  folgt dann

$$j m_0 = j \sqrt{a^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = a \frac{Z_0(ja/a)}{Z_1(ja/a)}. \quad (\text{II.6})$$

Da die Felder in die Tiefe des Plasmas hinein für große negative  $y$  exponentiell verschwinden müssen, kommt für  $y < 0$  als Lösung nur die Hankelsche Funktion 2. Art in Frage. Andererseits läßt sich Gl. (II.6) nur für Hankelsche Funktionen 1. Art erfüllen, die also für  $y > 0$  zu verwenden sind. Dies stört die Stetigkeit von  $E_x$  und  $H_z$  bei  $y = 0$  nicht, da beide Hankelsche Funktionen in gleicher Weise dort  $\infty$  werden.  $H_0^1(x) \rightarrow H_0^2(-x)$  für  $x \rightarrow 0$ , während  $E_y$  rechts und links von der Stelle  $x = 0$  entgegengesetztes Vorzeichen hat,  $H_1^1(x) \rightarrow -H_1^2(-x)$  für  $x \rightarrow 0$ .

Man setzt also für  $0 < y < 1/a$

$$H_z = y A H_1^1(ja\gamma y), \quad E_x = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_0^1(ja\gamma y),$$

$$E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_1^1(ja\gamma y)$$

und für  $y < 0$

$$H_z = y A H_1^2(ja\gamma y), \quad E_x = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_0^2(ja\gamma y),$$

$$E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_1^2(ja\gamma y).$$

Aus diesen Ansätzen folgt, daß für  $y \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $H_z$  dem Wert  $A/ja$  zustrebt, während die elektrischen Felder theoretisch  $\infty$  groß werden, d. h. bei der stets vorhandenen Dämpfung einem Maximalwert zu streben. Da aber  $E_x$  nur logarithmisch  $\infty$  wird,  $E_y$  dagegen wie  $1/y$ , ist nahe  $\varepsilon = 0$ ,  $E_y$  sehr groß gegen

$E_x$ , so daß die Kraftlinien die Stelle  $y = 0$  praktisch senkrecht, parallel zu  $y$  durchsetzen. Außerdem hat  $E_y$  oberhalb und unterhalb von  $y = 0$  entgegengesetztes Vorzeichen und nimmt nach beiden Seiten sehr viel rascher ab als  $E_x$ . Es führt dies zu einem Verlauf der Kraftlinien, wie in Abb. 2 skizziert, und wie er nach Arbeit<sup>1</sup> auch zu erwarten ist.

Bei  $y = 0$  bilden sich starke pulsierende Raumladungen, die durch die gegenphasigen Verschiebungen der Elektronen beiderseits von  $y = 0$  erzeugt werden.

Die Grenzbedingung (II.6) heißt dann

$$j_0 m = j \sqrt{a^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = a \frac{H_0^1(ja/a)}{H_1^1(ja/a)},$$

aus der zu jedem  $\omega$  das zugehörige  $a$  bestimmt werden kann, wobei  $a^2 \gg \omega^2/c^2$  vorausgesetzt ist. Fragt

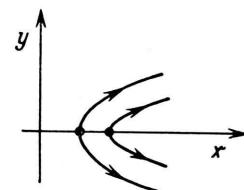


Abb. 2.

man speziell nach großen Werten von  $a$ ,  $a \rightarrow \infty$ ,  $v_p \rightarrow 0$ , so ergibt sich für große  $z$  mit

$$H_0^1(jz) = -j \frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} z}} \left(1 - \frac{1}{8z}\right),$$

$$H_1^1(jz) = -\frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} z}} \left(1 + \frac{3}{8z}\right),$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{8} a a + \frac{a^2}{4}.$$

Mit wachsendem  $a$  muß auch  $\omega$  wachsen. Mit  $a = k/\omega^2$  (II.5) ergibt sich

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{8} \frac{k}{\omega^2} a + \frac{k^2}{\omega^4}$$

oder

$$\frac{\omega}{c} \approx \sqrt[4]{\frac{5}{8} \frac{k a}{c^2}}$$

und die Phasengeschwindigkeit wird

$$v_p = \frac{\omega}{a} \approx c \sqrt[4]{\frac{5}{8} \frac{k}{a^3 c^2}}.$$

Es gibt auch in diesem Fall mit  $a \rightarrow \infty$  eine ausgeprägte Grenzflächenwelle mit sehr stark abfallenden Feldern oberhalb und unterhalb von  $y = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , und von sehr geringer Phasengeschwindigkeit. Nur tritt sie hier erst bei sehr hohen Frequenzen auf. Je steiler die Plasmadichte ansteigt, desto größer wird  $v_p$  bei gegebenem  $a$ .

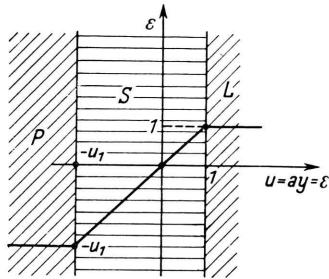


Abb. 3. P Plasma konstanter Dichte, S Übergangsschicht, L Luft.

Für den Fall, daß die mit abnehmendem  $y$  anwachsende Plasmadichte schließlich wieder konstant wird, genügt die angegebene Näherung nicht zur Befriedigung der Grenzbedingungen. Dagegen können wir in diesem Fall eine andere Näherung verwenden, die einen gewissen Einblick in die Verhältnisse gibt. Führt man in die Differentialgleichung 4 als neue unabhängige Variable  $u = ay = \varepsilon$  ein, so entsteht

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial u^2} - \frac{1}{u} \frac{\partial H_z}{\partial u} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\omega^2}{c^2} u - a^2 \right) H_z = 0.$$

Ist nun  $a^2$  genügend viel größer als  $u \omega^2/c^2 - a^2$ , so kann das letzte Glied dieser Gleichung vernachlässigt werden, und man erhält

$$H_z = C_1 \frac{u^2}{2} + C_2, \quad E_x = -j \frac{C_1}{\omega \varepsilon_0},$$

$$E_y = \frac{a}{\omega \varepsilon_0} \left( C_1 \frac{u}{2} + \frac{C_2}{u} \right).$$

Es ist jetzt  $E_x$  in der Übergangsschicht konstant,  $H_z$  wächst symmetrisch zu  $u = 0$  und  $E_y$  ist antisymmetrisch zu  $u = 0$  und geht für  $u \rightarrow 0$  gegen  $\infty$ .

Nimmt man nun einen Plasmaverlauf nach Abb. 3 an, d.h. von  $u = 1$  bis  $u = -u_1$  einen linearen Verlauf der Dielektrizitätskonstante von 1 über 0 bis  $-u_1$ , und daran anschließend ein Plasma konstanter Dichte mit der Dielektrizitätskonstante ( $-u_1$ ), so gilt innerhalb der Luft für  $u > 1$

$$H_{z_0} = A_0 e^{-m_0 y}, \quad E_{x_0} = j \frac{m_0}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y}$$

und im homogenen Plasma für  $u < -u_1$ , mit  $u_1^2 = \varepsilon_p^2$ ,

$$H_{z_1} = A_1 e^{m_1 y}, \quad E_{x_1} = -j \frac{m_1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_p} A_1 e^{m_1 y}$$

mit

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad m_0^2 = a^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad m_1^2 = a^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_p,$$

$$m_1^2 - m_0^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}.$$

Dann folgt aus den Stetigkeitsbedingungen bei  $u = 1$  und  $u = -u_1$

$$m_0 = -\frac{C_1}{\frac{C_1}{2} + C_2} \quad \text{und} \quad \frac{m_1}{\varepsilon_p} = \frac{C_1}{C_1 \frac{u_1^2}{2} + C_2}$$

oder

$$\frac{1}{m_0} + \frac{\varepsilon_p}{m_1} = \frac{\varepsilon_p^2 - 1}{2}.$$

Da positives  $\varepsilon_p < 1$  ist, ist diese Gleichung für positive  $m_0$  und  $m_1$  nur für negatives  $\varepsilon_p$  lösbar. In dem homogenen Plasma ist  $\omega^2 < \omega_0^2$ . Mit  $-\varepsilon_p = \varepsilon_p'$  ist dann

$$m_0 = \frac{1}{(\varepsilon_p'^2 - 1)2 + \varepsilon_p'/m_1}.$$

Diese Beziehung ist in Abb. 4 als Kurve 1 graphisch dargestellt.

Da außerdem die Beziehung  $m_1^2 - m_0^2 = \omega_0^2/c^2$  gilt (Abb. 4, Kurve 2), gibt der Punkt P die zusammengehörigen Werte von  $m_0$  und  $m_1$  an.

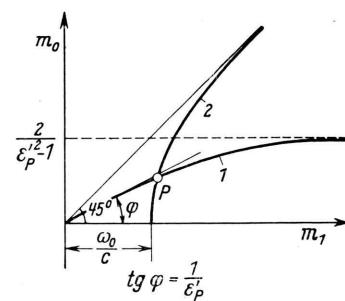


Abb. 4.

Man sieht, daß nur  $\varepsilon_p' > 1$  mögliche Werte ergibt, d.h.  $\omega_0^2/\omega^2 > 2$ , und daß große  $m_0$  und  $m_1$  nur für  $\varepsilon_p'$  nahe an 1 auftreten. Allerdings gilt die Lösung nur unter der Bedingung

$$a^2 \gg \left| \frac{\omega^2}{c^2} u - a^2 \right|,$$

die sich auch als

$$a^2 \gg \left| \frac{\omega_0^2}{c^2} + m_0^2 \right|$$

schreiben läßt. Für  $m_0$  sehr groß, muß auch  $a$  sehr groß werden, d. h. für die Grenzflächenwelle  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $m_0 \rightarrow \infty$  geht auch  $a \rightarrow \infty$ , d. h. wir kommen in diesem Fall wieder auf die homogene und unstetig in Luft übergehende Plasmaschicht zurück. Ob eine Grenzflächenwelle bei endlicher Frequenz auch bei einer Übergangsschicht ( $a$  endlich) auftritt, kann demnach diese Näherungslösung nicht entscheiden. Da

$a^2 = m_0^2 + \omega^2/c^2$  ist, treten Phasengeschwindigkeiten

$$v_p^2 = c^2 \frac{1}{1 + m_0^2 c^2/\omega^2}$$

kleiner als die Lichtgeschwindigkeit auf, die um so kleiner sind, je größer  $m_0$  ist und um so rascher auf beiden Seiten der Übergangsschicht abfallen, je größer  $m_0$  und  $m_1$  sind.

## Über die Beugung von Rohrwellen an ebenen Blenden

Von ROLF MÜLLER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 5a, 617—621 [1950]; eingegangen am 12. Oktober 1950)

Im ersten einleitenden Abschnitt werden bekannte Beziehungen, die für das Folgende notwendig sind, zusammengestellt. Im zweiten Abschnitt wird das Beugungsproblem für Rohrwellen an ebenen Blenden allgemein formuliert. Im dritten Abschnitt wird für den speziellen Fall der konzentrischen Lochblende im kreiszylindrischen Rohr gezeigt, daß die Beugung einer einfallenden zylindersymmetrischen  $E$ - bzw.  $H$ -Welle durch  $E$ - bzw.  $H$ -Wellen allein beschrieben wird, also an der Blende keine Umwandlungen von  $E$ - in  $H$ -Wellen auftreten, während bei einer einfallenden  $E$ - bzw.  $H$ -Welle die vom Azimut  $\varphi$  abhängt, zur Beschreibung der Beugung beide Wellentypen notwendig sind, also Umwandlungen auftreten.

### I.

Bekanntlich läßt sich jeder mit der Frequenz  $\omega$  periodische, elektromagnetische Feldzustand in einem ideal leitenden Hohlrohr durch 2 skalare Felder  $e(\xi, \eta, z)$  und  $h(\xi, \eta, z)$  in folgender Weise ausdrücken<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \mathfrak{E} &= (\text{grad}' \frac{\partial}{\partial z} e + k \text{ grad}' h \times \mathfrak{z} \\ &\quad - \mathfrak{z} \text{ div grad}' e) e^{i\omega t}, \\ i\sqrt{\mu} \mathfrak{H} &= (\text{grad}' \frac{\partial}{\partial z} h + k \text{ grad}' e \times \mathfrak{z} \\ &\quad - \mathfrak{z} \text{ div grad}' h) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Striche an den Differentialoperatoren deuten an, daß in einer Querschnittsfläche  $z = \text{const.}$ , also nur nach den Koordinaten  $\xi, \eta$  der Querschnittsfläche zu differenzieren ist.  $\mathfrak{z}$  ist der Einheitsvektor in Richtung der Rohrachse,  $\mu$  und  $\Delta$  sind die Materialkonstanten des Dielektrikums im Rohr und  $k = \omega \sqrt{\mu \Delta}$  die Wellenzahl. Die Potentiale  $e$  und  $h$  müssen im Inneren des Hohlrohrs den Wellengleichungen:

$$\Delta e + k^2 e = 0, \quad \Delta h + k^2 h = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Siehe etwa E. Ruch, Ann. Physik 7, 248 [1950].

und auf dem Rohrmantel den Randbedingungen

$$e = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

genügen. Man verifiziert leicht, daß die durch die Gln. (1) bis (3) definierten Felder  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  im Inneren des Rohres den Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} = i\omega \Pi \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = -i\omega \Delta \mathfrak{E} \quad (4)$$

genügen und auf dem Rohrmantel die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}_{tg}$  verschwindet. Man bezeichnet Schwingungszustände mit verschwindendem Potential  $h$  als Schwingungen vom elektrischen Typus und solche mit verschwindendem Potential  $e$  als Schwingungen vom magnetischen Typus. Die allgemeinsten Lösungen der Gln. (2) lauten

$$\begin{aligned} e &= \sum_r \left( a_r^{(e)} e^{i\gamma_r^{(e)} z} + b_r^{(e)} e^{-i\gamma_r^{(e)} z} \right) \varphi_r, \\ h &= \sum_r \left( a_r^{(h)} e^{i\gamma_r^{(h)} z} + b_r^{(h)} e^{-i\gamma_r^{(h)} z} \right) \psi_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei bedeuten die  $a_r^{(e)}, b_r^{(e)}, a_r^{(h)}, b_r^{(h)}$  willkürliche komplexe Konstanten, mit denen man die Lösung vorgegebenen Randbedingungen anpassen kann. Die  $\varphi_r, \psi_r$ , die nur von den Koordinaten  $\xi, \eta$  der Quer-